Iterative Lösung von Bewegungsgleichungen

Andreas Schneider

Kurzfassung des Inhalts:
Der freie Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstands wird mit einem einfachen numerischen Verfahren untersucht. Die Umsetzung erfolgt mithilfe von Tabellenkalkulation. Insbesondere studiert man den Einfluss verschiedener Parameter (Masse, Querschnittsfläche, …) auf die Bewegung.

Klassenstufe(n):
Jahrgangsstufe 10 am bayerischen Gymnasium

Lernziele:
- Strukturieren eines Problems durch Iterationsformeln
- Umsetzung des Iterationsschemas in Tabellenkalkulation
- Den Einfluss der wesentlichen Parameter auf die Bewegung qualitativ beschreiben können

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
Keine (Grundlagen der Tabellenkalkulation sind aber hilfreich.)

Zeitbedarf:
Ca. 5 Unterrichtsstunden

Sonstige Materialien:
Keine

Vorbemerkungen

Ein Thema aus der Physik

Obwohl es in dieser Handreichung in erster Linie um den Einsatz von CAS-Rechnern im Mathematikunterricht geht, wird hier eine Anwendung aus dem Physikunterricht der Jahrgangsstufe 10 thematisiert, da auch die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten von CAS im naturwissenschaftlichen Unterricht gezeigt werden sollen. Vielleicht gelingt es auf diese Weise, Lehrkräfte anzusprechen, die bislang den Gebrauch von CAS eher kritisch sehen.

Die iterative Lösung von Bewegungsgleichungen ist im Physiklehrplan der zehnten Klasse fest verankert. Mathematisch gesehen handelt es sich hierbei um die **numerische Lösung von Differentialgleichungen**. Für den Mathematikunterricht der Oberstufe ergibt sich eine wertvolle **Propädeutik für die Integralrechnung**. Zudem werden die Schülerinnen und Schüler mit dem wichtigen Werkzeug der **Tabellenkalkulation** vertraut, das in alle zugelassenen CAS-Systeme integriert ist.

Inhalt der Unterrichtssequenz und didaktische Überlegungen

In der Unterrichtssequenz soll exemplarisch der freie Fall unter Einbeziehung des Luftwiderstandes mit realistischen Werten „durchgerechnet" werden. Da mit zunehmender Fallgeschwindigkeit die Luftreibungskraft wächst, ist bei diesem Vorgang die *Beschleunigung nicht konstant*. Folglich kann die bekannte geschlossene Lösung für Bewegungen mit konstanter Beschleunigung ($v(t) = at$ und $x(t) = \frac{a}{2}t^2$) nicht verwendet werden. Eine exakte mathematische Lösung des Problems würde die Lösung einer nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung erfordern, ist also somit für Schülerinnen und Schüler, die noch nicht einmal Grundlagen der Differentialrechnung kennen, nicht möglich.

Durch Zerlegung der Bewegung in kleine Zeitschritte ist es jedoch möglich, eine brauchbare numerische Lösung mit elementarer Mathematik zu erhalten. In einem *Iterationsschema* werden die Werte von Beschleunigung, Geschwindigkeit und Ort für jeden Zeitschritt neu berechnet. Für diese Berechnung ist Tabellenkalkulation ein passendes, leicht zu bedienendes Werkzeug. Unter Anleitung des Lehrers entwickeln die Schülerinnen und Schüler das Iterationsschema und führen zunächst *einige Iterationsschritte von Hand* durch, um die Struktur der Rechnung nachvollziehen zu können. Erst dann wird die Iteration mithilfe der Tabellenkalkulation durchgeführt. Dabei werden die Einflussgrößen auf die Fallbewegung (Masse, Querschnittsfläche, …) zunächst konstant gehalten. In diesem Schritt erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass die Beschleunigung während der Fallbewegung immer weiter abnimmt, bis sich eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit einstellt.

Im nächsten Schritt sollen die Schülerinnen und Schüler untersuchen, wie sich *Variationen der Einflussgrößen* Masse und Querschnittsfläche auf den Verlauf der Bewegung und die Maximalgeschwindigkeit auswirken. Durch diese *dynamische Betrachtungsweise* können die Schülerinnen und Schüler schließlich die Frage klären, ob schwere Körper „in Wirklichkeit" doch schneller fallen als leichte.

Mehrwert des TC-Einsatzes

Der Mehrwert bei Verwendung eines Taschencomputers besteht darin, dass jede Schülerin bzw. jeder Schüler die Iteration selbst durchführen kann. Bei der Variation der Einflussgrößen können die Schülerinnen und Schüler einzeln oder in Kleingruppen selbstständig arbeiten und eigenständig Hypothesen aufstellen und prüfen.

Die Einführung in Tabellenkalkulation ist schließlich ein nützlicher „spin off".

Freier Fall mit Luftwiderstand

Aufgabenstellung

Betrachtet wird der freie Fall eines Fallschirmspringers während der ersten 15 Sekunden, bevor er seinen Schirm aufspannt. Zu bestimmen sind Ort und Geschwindigkeit des Springers in Abhängigkeit von der Zeit. Naheliegende konkrete Fragestellungen: Welche Maximalgeschwindigkeit erreicht der Springer? Welchen Einfluss haben Masse, Querschnittfläche und weitere relevante Größen?

Realistische Beispieldaten: (Vgl. Fokus Physik 10, S. 78 ff)

$m = 100\ kg$ (Masse des Springers samt Ausrüstung)

$A = 0{,}80\ m^2$ (maximale Querschnittsfläche in Fallrichtung)

$cw = 1{,}1$ (Widerstandsbeiwert bei maximaler Querschnittsfläche in Fallrichtung)

$\rho = 1{,}3\ kg\ m^{-3}$ (Dichte der Luft)

Physikalische Analyse

Zunächst muss den Schülerinnen und Schülern die Formel zur Berechnung der Luftwiderstandskraft mitgeteilt und erläutert werden: $F_L = \frac{c_w A \rho}{2} v^2$.

Die Proportionalität des Luftwiderstands sowohl zur Querschnittsfläche des sich bewegenden Körpers als auch zur Dichte des umgebenden Mediums ist ohne Weiteres nachzuvollziehen. Dass ferner verschiedene Profilformen unterschiedlich windschnittig sind, ist ebenfalls unmittelbar einsichtig. Der Einfluss des Profils wird mit dem Widerstandsbeiwert bzw. c_w-Wert berücksichtigt. Dieser Begriff ist technisch interessierten Schülerinnen und Schülern aus folgendem Kontext bekannt: „Je geringer der c_w-Wert ist, desto windschnittiger ist ein Fahrzeug." Die für die folgenden Berechnungen entscheidende v^2-Abhängigkeit des Luftwiderstands ist allerdings nicht intuitiv verständlich, wenngleich Alltagserfahrungen zumindest für einen überproportionalen Einfluss der Geschwindigkeit sprechen. Entsprechende Experimente im Windkanal zur Bestätigung der Formel für F_L können in der Schule kaum mit vernünftigem Aufwand durchgeführt werden, sind aber einfach zu beschreiben.

Unter Anwendung des zweiten Newtonschen Gesetzes erhält man eine Formel für die Beschleunigung. Diese hängt von v ab und ist somit nicht konstant. Als Abkürzung verwenden wir im Folgenden: Bremsparameter $b = \frac{c_w A \rho}{2m}$.

Kraftgesetz:	$F = mg - F_L = mg - \frac{c_w A \rho}{2} v^2$
Beschleunigung:	$a = \frac{F}{m} = g - \frac{c_w A \rho}{2m} v^2 = g - bv^2 = 9{,}81 \frac{m}{s^2} - 5{,}72 \cdot 10^{-3} m^{-1} \cdot v^2$

Iterationsschema

Die Bewegung wird in so kleine Zeitschritte Δt zerlegt, dass man in guter Näherung Beschleunigung und Geschwindigkeit während des Zeitintervalls als konstant ansehen kann. Aus den aktuellen Werten von a_n und v_n wird der nächste Geschwindigkeitswert berechnet:

$$v_{n+1} = v_n + a_n \cdot \Delta t$$

Hieraus ergibt sich der nächste Wert für die Beschleunigung:

$$a_{n+1} = g - b \cdot v_{n+1}^2$$

Und damit hat man die Startwerte für den nächsten Iterationsschritt, usw.

Um den Schülerinnen und Schülern das Schema verständlich zu machen, sollten sie einige Zeilen „von Hand“ durchrechnen, also lediglich mithilfe eines gewöhnlichen arithmetischen Taschenrechners. Dazu ist ein Arbeitsblatt nach folgendem Schema hilfreich:

Arbeitsblatt

Ergänze die Tabelle nach dem vorgegebenen Iterationsschema!

Zeitschritt $\Delta t = 0{,}5\ s$

Bremsparameter $b = 0{,}00572\ m^{-1}$

Schritt	Zeit t in s	Geschwindigkeit v in ms^{-1}	Beschleunigung a in ms^{-2}
0 Startwerte	t_0 0	v_0 0	$a_0 = g$ 9,81
1	$t_1 = t_0 + \Delta t$ 0,5	$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t$ 4,91	$a_1 = g - b{v_1}^2$ 9,67
2	$t_2 = t_1 + \Delta t$	$v_2 = v_1 + a_1 \Delta t$	$a_2 = g - b{v_2}^2$
3			
4			
5			
6			
7			

usw.

Iteration mithilfe von Tabellenkalkulation

Nach der mühsamen Handrechnung sollten die Schülerinnen und Schüler jetzt hinreichend motiviert sein, die Berechnungen durch Verwendung von Tabellenkalkulation zu automatisieren.

Iterationsschema

t in s	v in m/s	a in m/s^2
$t_1 = 0$	$v_1 = 0$	$a_1 = g$
$t_2 = t_1 + \Delta t$	$v_2 = v_1 + a_1 \cdot \Delta t$	$a_2 = g - b \cdot {v_2}^2$
$t_3 = t_2 + \Delta t$	$v_3 = v_2 + a_2 \cdot \Delta t$	$a_3 = g - b \cdot {v_3}^2$

usw.

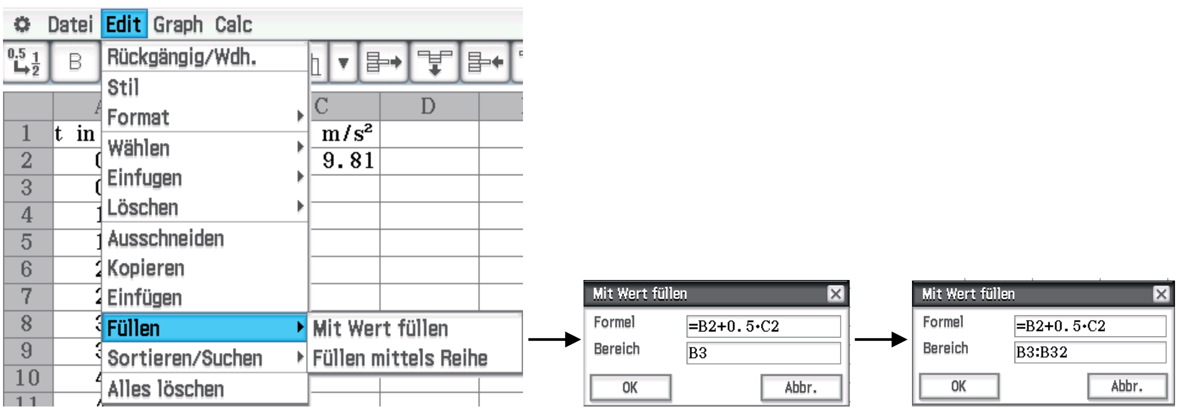
Ausfüllen der Tabelle

Die ersten beiden Zeilen müssen von Hand eingegeben werden. Die Tabellenkalkulation des ClassPad ist weitestgehend analog zu *MS Excel* bzw. *Open Office Calc* zu bedienen, insbesondere, was die *relativen Zellenbezüge* betrifft.

Wir wählen $\Delta t = 0.5$

	A	B	C
1	t in s	v in m/s	a in m/s^2
2	0	0	9.81
3	$= A2 + 0.5$	$= B2 + C2 \cdot 0.5$	$= 9.81 - 0.00572 \cdot B3\hat{}2$

Um die folgenden Zeilen zu füllen, markiere man eine Zelle mit einer Formel z. B. B3 und wähle dann *Edit→ Füllen→ Mit Wert füllen*. Dann kann man den Spaltenbereich ändern, sodass die Iterationsformel z. B. für den Bereich B3:B32 angewendet wird, also für die ersten 15 Sekunden der Modellrechnung.



Außerdem sollte man für die Ausgabe eine feste Anzahl von Nachkommastellen einstellen, hier sind zwei Dezimalen sinnvoll:

⚙→ *Grundformat→ Zahlenformat→ Fest 2*

Numerische Ergebnistabelle

Jetzt ergibt sich „auf Knopfdruck“ das vollständige Ergebnis der Iteration für den gewählten Zeitabschnitt:

Datei Edit Graph Calc

	A	B	C	D
1	t in s	v in m/s	a in m/s^2	
2	0.00	0.00	9.81	
3	0.50	4.91	9.67	
4	1.00	9.74	9.27	
5	1.50	14.37	8.63	
6	2.00	18.69	7.81	
7	2.50	22.59	6.89	
8	3.00	26.04	5.93	
9	3.50	29.01	5.00	
10	4.00	31.50	4.13	
11	4.50	33.57	3.36	
12	5.00	35.25	2.70	
13	5.50	36.60	2.15	
14	6.00	37.68	1.69	
15	6.50	38.52	1.32	
16	7.00	39.18	1.03	
17	7.50	39.70	0.80	
18	8.00	40.09	0.61	
19	8.50	40.40	0.47	
20	9.00	40.64	0.36	
21	9.50	40.82	0.28	
22	10.00	40.96	0.21	
23	10.50	41.07	0.16	
24	11.00	41.15	0.13	
25	11.50	41.21	0.10	
26	12.00	41.26	0.07	
27	12.50	41.30	0.06	
28	13.00	41.32	0.04	

=B2+C2•0.5

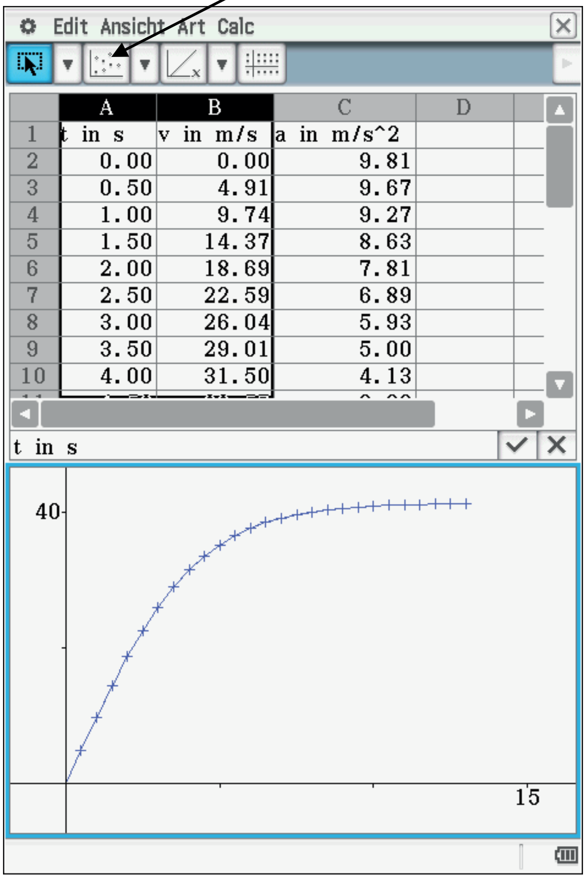
B3 4.905

Natürlich ist eine rein numerische Darstellung der Ergebnisse unanschaulich und unbefriedigend, daher stellen wir das Ergebnis jetzt graphisch dar.

t-v-Diagramm

Um die Ergebnisse als t-v-Diagramm darzustellen, markiere man die Spalten A und B und wähle den Diagrammtyp *Punktdiagramm*. Im Diagrammfenster kann man mit *Ansicht*→ *Verbindungslinien* die einzelnen Punkte zu einem durchgehenden Graphen verbinden.

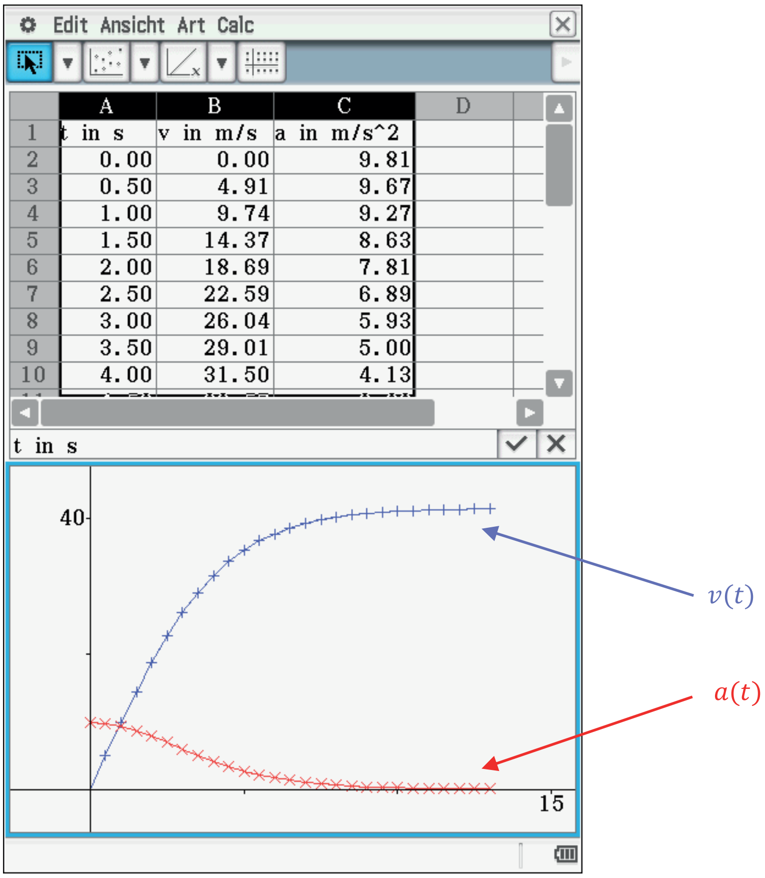
Werkzeug für das *Punktdiagramm*



Man erkennt jetzt deutlich das asymptotische Verhalten von $v(t)$, d. h., dass sich der Springer nach ca. zehn Sekunden mit näherungsweise konstanter Geschwindigkeit bewegt.

t-v-Diagramm und t-a-Diagramm

Möchte man zusätzlich das t-a-Diagramm darstellen, markiere man alle drei Spalten der Ergebnistabelle und wähle wieder den Diagrammtyp *Punktdiagramm*.



	A	B	C	D
1	t in s	v in m/s	a in m/s^2	
2	0.00	0.00	9.81	
3	0.50	4.91	9.67	
4	1.00	9.74	9.27	
5	1.50	14.37	8.63	
6	2.00	18.69	7.81	
7	2.50	22.59	6.89	
8	3.00	26.04	5.93	
9	3.50	29.01	5.00	
10	4.00	31.50	4.13	

Der visualisierte Zusammenhang zwischen $v(t)$ und $a(t)$ kann auch als Propädeutik für den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung verstanden werden! Insbesondere erkennt man, dass eine näherungsweise konstante Geschwindigkeit mit einem Beschleunigungswert nahe bei null einhergeht.

Berechnung der Ortskoordinate $x(t)$

Bisher wurde die Frage ausgeklammert, welche Strecke der Springer nach einer bestimmten Zeit durchfallen hat. Bevor man in die Details geht, kann man die Fallhöhe nach 15 Sekunden zunächst grob abschätzen. Bei der Betrachtung des t-v-Diagramms erkennt man, dass die Bewegung in erster Näherung in zwei Phasen unterteilt werden kann: Während der ersten fünf Sekunden beschleunigt der Springer einigermaßen gleichmäßig von 0 auf 40 m/s, bewegt sich also mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von ca. 20 m/s. Für die restlichen 10 Sekunden geht man von einer konstanten Geschwindigkeit von 40 m/s aus. Daraus ergibt sich:

$$x(15\,s) \approx \frac{1}{2}\left(0\,\frac{m}{s} + 40\,\frac{m}{s}\right) \cdot 5s + 40\,\frac{m}{s} \cdot 10\,s = 100\,m + 400\,m = 500\,m$$

Der Trick mit der mittleren Geschwindigkeit, der für die Abschätzung der Fallstrecke während der ersten fünf Sekunden genutzt wurde, lässt sich auch für die kleinen Zeitabschnitte der Iteration verwenden: Wir ergänzen unser Schema um eine Spalte, in der die aktuelle Ortskoordinate des Springers nach folgender Iterationsformel berechnet wird:

$$x_{n+1} = x_n + 0{,}5 \cdot (v_n + v_{n+1}) \cdot \Delta t.$$

Iterationsschema:

t in s	v in m/s	a in m/s^2	x in m
$t_1 = 0$	$v_1 = 0$	$a_1 = g$	$x_1 = 0$
$t_2 = t_1 + \Delta t$	$v_2 = v_1 + a_1 \cdot \Delta t$	$a_2 = g - b \cdot {v_2}^2$	$x_2 = x_1 + 0.5 \cdot (v_1 + v_2) \cdot \Delta t$
$t_3 = t_2 + \Delta t$	$v_3 = v_2 + a_2 \cdot \Delta t$	$a_3 = g - b \cdot {v_3}^2$	$x_3 = x_2 + 0.5 \cdot (v_2 + v_3) \cdot \Delta t$

usw.

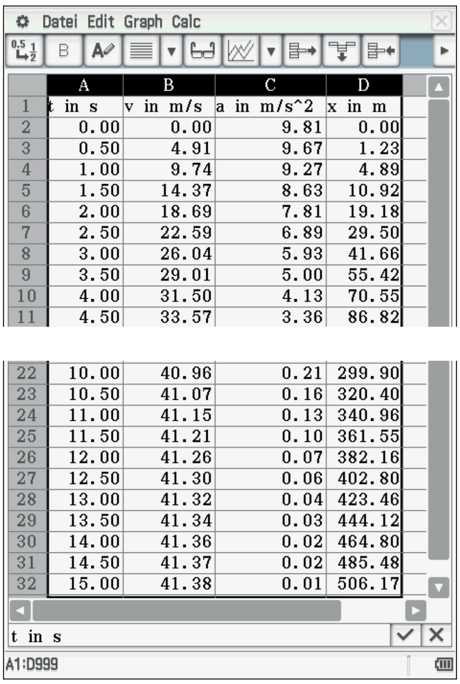
Mit dem Formalismus der Tabellenkalkulation sieht das dann mit $\Delta t = 0{,}5\ s$ folgendermaßen aus:

	A	B	C	D
1	t in s	v in m/s	a in m/s^2	x in m
2	0	0	9.81	0
3	$= A2 + 0.5$	$= B2 + C2 \cdot 0.5$	$= 9.81 - 0.00572 \cdot B3\text{^}2$	$= D2 + 0.5 \cdot (B2 + B3) \cdot 0.5$

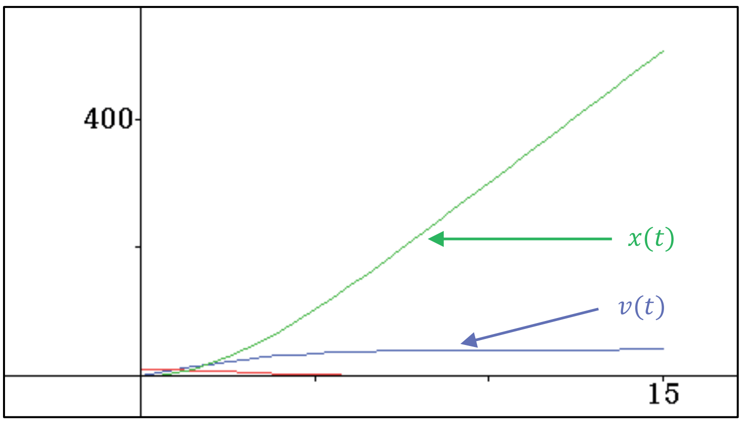
usw.

Die Durchführung der Iteration mit dem ClassPad ergibt folgendes Ergebnis, das wiederum numerisch und graphisch dargestellt wird.

Ort und Geschwindigkeit in einem Diagramm



	A	B	C	D
1	t in s	v in m/s	a in m/s^2	x in m
2	0.00	0.00	9.81	0.00
3	0.50	4.91	9.67	1.23
4	1.00	9.74	9.27	4.89
5	1.50	14.37	8.63	10.92
6	2.00	18.69	7.81	19.18
7	2.50	22.59	6.89	29.50
8	3.00	26.04	5.93	41.66
9	3.50	29.01	5.00	55.42
10	4.00	31.50	4.13	70.55
11	4.50	33.57	3.36	86.82
22	10.00	40.96	0.21	299.90
23	10.50	41.07	0.16	320.40
24	11.00	41.15	0.13	340.96
25	11.50	41.21	0.10	361.55
26	12.00	41.26	0.07	382.16
27	12.50	41.30	0.06	402.80
28	13.00	41.32	0.04	423.46
29	13.50	41.34	0.03	444.12
30	14.00	41.36	0.02	464.80
31	14.50	41.37	0.02	485.48
32	15.00	41.38	0.01	506.17



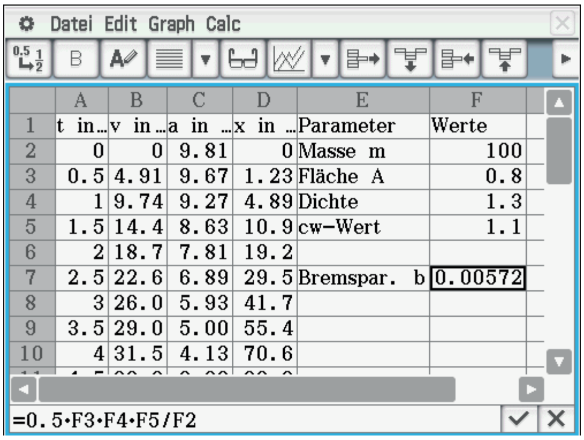
Die Beschleunigungskurve lässt sich bei dieser Skalierung kaum mehr erkennen. Dafür kann man deutlich sehen, dass der Schätzwert $x(15\,s) \approx 500\,m$ erstaunlich gut passt. Als Propädeutik für die Integralrechnung lässt sich ferner zeigen, dass die Stammfunktion einer (näherungsweise) konstanten Funktion eine (näherungsweise) affine Funktion ist.

Variation der Einflussgrößen (dynamische Komponente)

Automatische Berechnung des Bremsparameters

Um den Einfluss der Parameter m, cw, A und ρ auf die Fallbewegung zu untersuchen, bietet es sich an, die Werte dieser Parameter in jeweils eigenen Zellen zu speichern. Im folgenden Beispiel sind dies die Zellen F2 bis F5. Als nächstes wird aus diesen Werten der „Bremsparameter“ b berechnet, der in die Formel für die Beschleunigung eingeht.

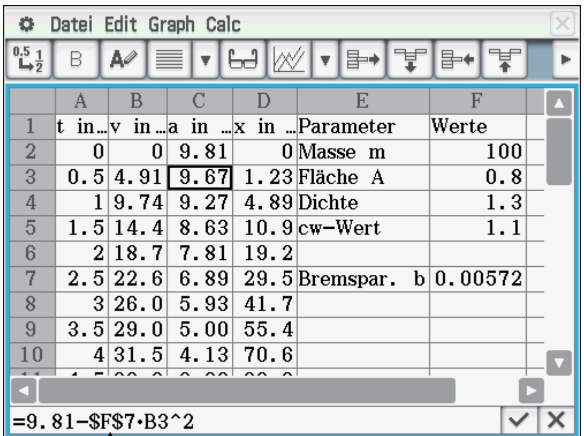
Es gilt: $b = \frac{c_w A \rho}{2m}$ und $a(v) = g - bv^2$. Der Wert von b wird im Feld F7 berechnet.



	A	B	C	D	E	F
1	t in…	v in…	a in …	x in …	Parameter	Werte
2	0	0	9.81	0	Masse m	100
3	0.5	4.91	9.67	1.23	Fläche A	0.8
4	1	9.74	9.27	4.89	Dichte	1.3
5	1.5	14.4	8.63	10.9	cw−Wert	1.1
6	2	18.7	7.81	19.2		
7	2.5	22.6	6.89	29.5	Bremspar. b	0.00572
8	3	26.0	5.93	41.7		
9	3.5	29.0	5.00	55.4		
10	4	31.5	4.13	70.6		

=0.5·F3·F4·F5/F2

Um jetzt diesen Wert in der Spalte für die Beschleunigung verwenden zu können, muss hier mit einem **absoluten Zellenbezug** gearbeitet werden. Der absolute Bezug auf die Zelle F7, in der der aktuelle Wert für b gespeichert ist, wird wie bei Excel mit **F7** geschrieben.



	A	B	C	D	E	F
1	t in…	v in…	a in …	x in …	Parameter	Werte
2	0	0	9.81	0	Masse m	100
3	0.5	4.91	9.67	1.23	Fläche A	0.8
4	1	9.74	9.27	4.89	Dichte	1.3
5	1.5	14.4	8.63	10.9	cw−Wert	1.1
6	2	18.7	7.81	19.2		
7	2.5	22.6	6.89	29.5	Bremspar. b	0.00572
8	3	26.0	5.93	41.7		
9	3.5	29.0	5.00	55.4		
10	4	31.5	4.13	70.6		

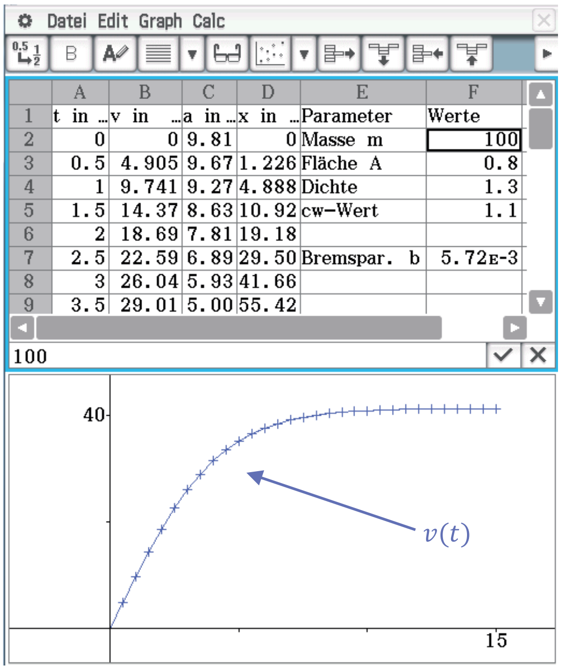
=9.81−F7·B3^2

Absoluter Bezug auf die Zelle F7!

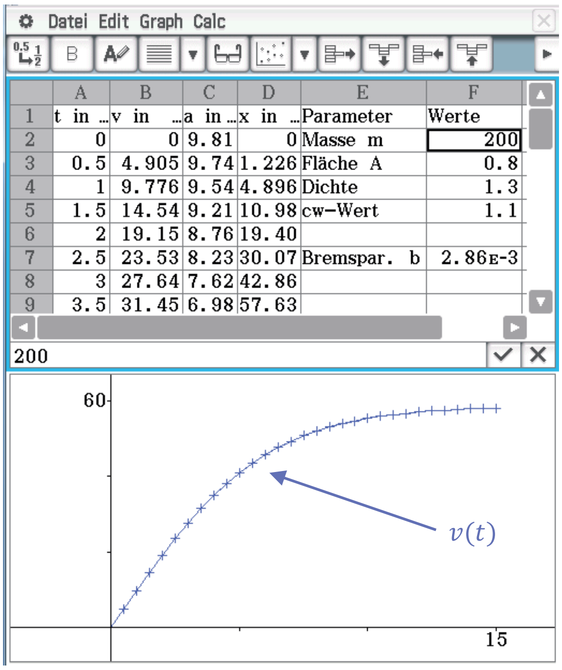
Einfluss der Masse

Jetzt kann man Parameter einzeln variieren und somit studieren, was sich verändert, wenn man z. B. die Masse verdoppelt und alle anderen Einflussgrößen konstant lässt.

In den folgenden Beispielen gilt: $m_1 = 100\ kg$ bzw. $m_2 = 200\ kg$.



	A	B	C	D	E	F
1	t in …	v in …	a in …	x in …	Parameter	Werte
2	0	0	9.81	0	Masse m	100
3	0.5	4.905	9.67	1.226	Fläche A	0.8
4	1	9.741	9.27	4.888	Dichte	1.3
5	1.5	14.37	8.63	10.92	cw-Wert	1.1
6	2	18.69	7.81	19.18		
7	2.5	22.59	6.89	29.50	Bremspar. b	5.72E-3
8	3	26.04	5.93	41.66		
9	3.5	29.01	5.00	55.42		



	A	B	C	D	E	F
1	t in …	v in …	a in …	x in …	Parameter	Werte
2	0	0	9.81	0	Masse m	200
3	0.5	4.905	9.74	1.226	Fläche A	0.8
4	1	9.776	9.54	4.896	Dichte	1.3
5	1.5	14.54	9.21	10.98	cw-Wert	1.1
6	2	19.15	8.76	19.40		
7	2.5	23.53	8.23	30.07	Bremspar. b	2.86E-3
8	3	27.64	7.62	42.86		
9	3.5	31.45	6.98	57.63		

Man erkennt, dass bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes die Masse sehr wohl Einfluss auf die Fallbewegung hat. Im obigen Beispiel bewirkt die Verdoppelung der Masse (bei Konstanz aller übrigen Einflussgrößen), dass die Endgeschwindigkeit von ca. 40 m/s auf ca. 60 m/s steigt. (Bei exakter Betrachtung ergibt sich hier eine Zunahme der Maximalgeschwindigkeit um den Faktor $\sqrt{2}$.)

An dieser Stelle könnten der Klasse folgende Arbeitsaufträge gegeben werden:

- Variiere die einzelnen Parameter und studiere ihren Einfluss auf den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit und insbesondere auf die Maximalgeschwindigkeit.
- Nimm Stellung zu der Aussage: „Je schwerer ein Gegenstand ist, desto schneller fällt er zu Boden.“

Letztlich sollte sich bei der Variation der verschiedenen Parameter u. a. folgende zentrale Erkenntnis herauskristallisieren: Die **Maximalgeschwindigkeit** hängt von dem **Quotienten aus Masse und Querschnittsfläche** ab.

Letzteres kann man auch durch folgende Rechnung begründen:

$$0 = a = g - \frac{c_W A \rho}{2m} v_{max}^2 \Longrightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2mg}{c_W A \rho}}$$

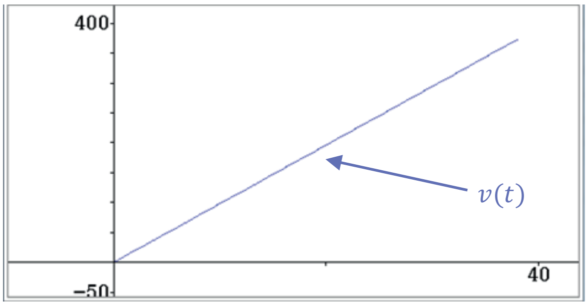
Allerdings wird so nur die asymptotische Geschwindigkeit bestimmt und nicht der zeitliche Verlauf von $v(t)$. Somit ist die Iteration ungleich aussagekräftiger.

Freier Fall im Vakuum

Als kleine Pointe zum Schluss: Den freien Fall im Vakuum kann man simulieren, indem man die Dichte auf den Wert null setzt. Es ergibt sich unabhängig von der Masse eine Bewegung mit der konstanten Fallbeschleunigung $g = 9{,}81\ ms^{-2}$. Ein aktuelles motivierendes Beispiel für diesen Kontext liefert der Sprung von Felix Baumgartner aus einer Höhe von ca. 40 km im Jahr 2012. Hierbei ist während der Anfangsphase die Bedingung „Dichte = null" hinreichend gut erfüllt, was dazu führt, dass nach ca. 34 s die Schallgeschwindigkeit 330 m/s erreicht wird.

Datei Edit Graph Calc

	A	B	C	D	E	F
1	t in s	v in …	a in …	x in …	Parameter	Werte
2	0	0	9.81	0	Masse m	100
3	0.5	4.905	9.81	1.23	Fläche A	0.8
4	1	9.81	9.81	4.91	Dichte	0
5	1.5	14.72	9.81	11.0	cw-Wert	1.1
6	2	19.62	9.81	19.6		
7	2.5	24.53	9.81	30.7	Bremspar. b	0
8	3	29.43	9.81	44.1		
9	3.5	34.34	9.81	60.1		
66	32	313.9	9.81	5023.		
67	32.5	318.8	9.81	5181.		
68	33	323.7	9.81	5342.		
69	33.5	328.6	9.81	5505.		
70	34	333.5	9.81	5670.		
71	34.5	338.4	9.81	5838.		
72	35	343.4	9.81	6009.		
73	35.5	348.3	9.81	6182.		
74	36	353.2	9.81	6357.		



Schlussbemerkung

Der freie Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstands stellt bei weitem nicht die einzige Anwendung des oben beschriebenen Iterationsverfahrens dar. Im Physikunterricht am Gymnasium stößt man auf eine Fülle von Problemstellungen, die bei umfassender Behandlung eigentlich vertiefte Kenntnisse der Differential- und Integralrechnung erforderten, die weit über den Schulstoff hinausgehen. Beispiele hierfür sind ungedämpfte bzw. gedämpfte harmonische Schwingungen (Federpendel, Schwingkreis), Auf- und Entladevorgänge (Kondensator), Ein- und Ausschaltvorgänge (Spule), sowie Bewegungen im Gravitationsfeld (Bahnen von Planeten und Kometen). In allen genannten Fällen erfordern analytische Lösungen Kenntnisse über komplizierte Funktionen (e-Funktion, trigonometrische Funktionen, hyperbolische Funktionen, ...), die im Mathematikunterricht entweder sehr spät oder gar nicht auftauchen. Außerdem müsste das Kalkül der Differentialgleichungen wenigstens in Grundzügen bekannt sein. Numerische Verfahren bieten somit einen befriedigenden Ausweg aus diesem Dilemma. Ferner gilt es zu bedenken, dass die meisten Probleme aus der angewandten Mathematik ohnehin nicht analytisch, sondern nur numerisch gelöst werden können.

Literaturverzeichnis

Fösel, Götz u. a.: Fokus Physik 10, Berlin 2008, S. 68 - 80 (Physik-Schulbuch für die 10. Jgst an bayerischen Gymnasien, Cornelsen-Verlag)

Feynman, Leighton, Sands: The Feynman Lectures on Physics, (Volume 1), Addison-Wesley publishing company, 1963, Kapitel 9-6 und 9-7

Hammer, Knauth, Kühnel: Physik 11, München 1996, S. 44 - 48 (Physik-Schulbuch für die 11. Jgst am früheren G9 in Bayern, Oldenbourg-Verlag)

Weigand, H.-G., Wie fliegt eigentlich der Ball durch die Luft? - Die Flugkurven von Basketball und Federball, Mathematiklehren, Heft 95 (1999), 53 - 57